TP — Séries de Fourier

Question 1. Soit f la fonction de période 1 définie par:

$$\forall x \in [0,1) \qquad f(x) = 1 - x^2.$$

- Tracer le graphe de f avec Maple.
- Calculer les coefficients de Fourier de f en définissant deux fonctions a et b prenant en argument n et retournant respectivement $a_n(f)$ et $b_n(f)$ (correspondants aux sinus et cosinus).
- Ecrire une procédure S qui à N associe la somme partielle S_N^f de N termes de la série de Fourier de f,
$$S_N^f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n(f) \cos 2\pi n x + b_n(f) \sin 2\pi n x \right].$$
- Tracer sur la même figure les graphes de f et de la somme partielle de rang 10. Représenter les graphes des sommes partielles de rang 20, 50, 100 au voisinage du point $x = 0$. Commentez le résultat.

Les fonctions dont on peut avoir besoin:
`frac`, `floor`, `int`, `plot`, `proc`.

<u>**Phénomène de Gibbs**</u>: Au voisinage d'un point où une fonction f présente une discontinuité, la somme partielle S_N^f de la série de Fourier de f peut présenter un écart important par rapport à la fonction f vers laquelle elle converge. Au voisinage d'un point de discontinuité, les valeurs prises par les sommes partielles de la série de Fourier oscillent autour de la valeur vers laquelle elles doivent converger d'après la théorie. Par ailleurs, une augmentation de N ne réduira pas l'amplitude de l'oscillation contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer. Au contraire, l'écart reste de même ordre que la somme partielle. Toutefois, l'oscillation s'effectuera sur des intervalles de plus en plus petits. Ce phénomène est appelé le "phénomène de Gibbs". Il fut pour la première fois expliqué du point de vue mathématique par J. Gibbs en 1899. Ce phénomène reflète les difficultés qu'il y a à approcher une fonction discontinue par une somme de fonctions continues sinusoidales.

Question 2. Définissons la fonction

$$\tilde{S}_N^f(x) = S_N^f\left(\frac{x}{N}\right).$$

- Tracer sur la même figure les graphes de $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{N}\right)$ et de $\tilde{S}_N^f\left(\frac{x}{N}\right)$ pour $N = 10, 20, 50, 100$ et $x \in (-4, 4)$.
- Remplacer f par une autre fonction g de période 1, avec un saut en $x = 0$ tel que $g(-0) = 0$, $g(+0) = 1$ (exemple: $g(x) = 1 - x$ pour $x \in [0,1)$) et répéter les manipulations précédentes. Conclusions?
- Montrer (+ **2 points à la note finale**) que pour $x > 0$:
$$\lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N^f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi x}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy.$$